AUTOUR DES FONCTIONS

Exercice 1 :

1. L'ensemble de définition Df est $[-3\,;7]$
2.

x	-3		-1		5		7
$f(x)$	4	↘	-1	↗	5	↘	0

3.

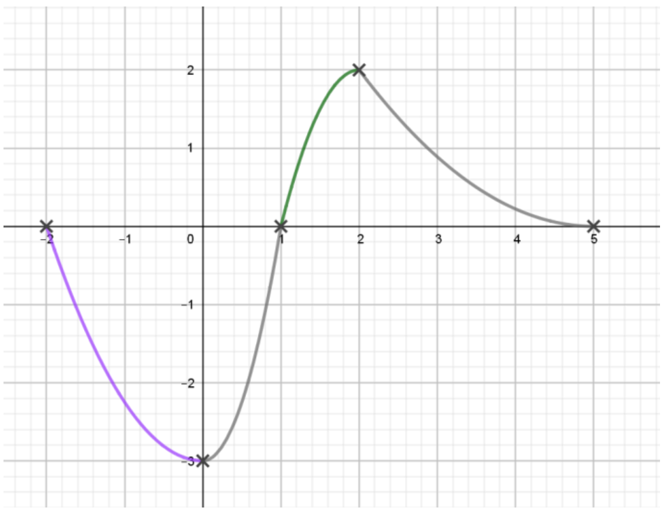
x	-3		-2		2		7
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0

Exercice 2 :

1.

x	-2		0		1		2		5
$f(x)$	0	↘	-3	↗	0	↗	2	↘	0

2.



3. f est négative sur l'intervalle [-2 ;1].

4. f est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$. $0{,}5 \leq 1{,}2$ donc $f(0{,}5) \leq f(1{,}2)$.

Exercice 3 :

1. f et g sont définies sur $[-3; 6]$.

2. On va considérer que f admet un maximum lorsque $x = 0$.

si $k < -2$ l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.
si $k = -2$ l'équation $f(x) = k$ a une solution $x = 4$.
si $k \in]-2; 2[$ l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.
si $k = 2$ l'équation $f(x) = k$ a trois solutions $x \in \{-3; 2; 6\}$.
si $k \in]2; f(0)[$ l'équation $f(x) = k$ a deux solutions.
si $k = f(0)$ l'équation $f(x) = k$ a une solution $x = 0$.
si $k > f(0)$ l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

3.

Equation/inéquation	solution	*remarque*
$f(x) = 5$	$S = \{-1; 1\}$	
$f(x) = g(x)$	$S = \{2; 5\}$	
$g(x) \leq -1$	$S = [-3; 0{,}5] \cup [5; 6]$	*0,5 n'est pas une valeur que l'on peut lire précisément sur le graphique.*
$f(x) < g(x)$	$S =]2; 5[$	

Exercice 4 :

Le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des ordonnées a pour ordonnée $f(0) = 32$.

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec l'axe des abscisses ont une abscisse qui vérifie l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-5)^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-5-3)(x-5+3) = 0$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-8)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 8 \text{ ou } x = 2$

Les points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes du repère ont donc pour coordonnées :
$(0; 32), (8; 0)$ et $(2; 0)$

GÉOMÉTRIE DANS LE PLAN MUNI D'UN REPÈRE

Exercice 1 :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 0-(-2) \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $\mathrm{E}\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$ $\mathrm{E}\left(\dfrac{3+6}{2}; \dfrac{-2+0}{2}\right)$ $\mathrm{E}(\dfrac{9}{2}; -1)$

3. D est le symétrique de C par rapport à E $\Leftrightarrow$ E est le milieu de [CD].

Or le milieu de [CD] a pour coordonnées $(\dfrac{x_C + x_D}{2}; \dfrac{y_C + y_D}{2})$ c'est-à-dire $(\dfrac{4 + x_D}{2}; \dfrac{2 + y_D}{2})$

E milieu de [CD] $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4+x_D}{2} = \dfrac{9}{2} \\ \dfrac{2+y_D}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+x_D = 9 \\ 2+y_D = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -4 \end{cases} \Leftrightarrow D(5;-4)$

Remarque : on aurait aussi pu écrire que D est le symétrique de C par rapport à E $\Leftrightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$.
On travaillerait alors avec les cordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{EC}$.

4. E est le milieu de [AB] et de [CD].
Le quadrilatère ACBD a ses diagonales qui se coupent en leur milieu donc c'est un parallélogramme.

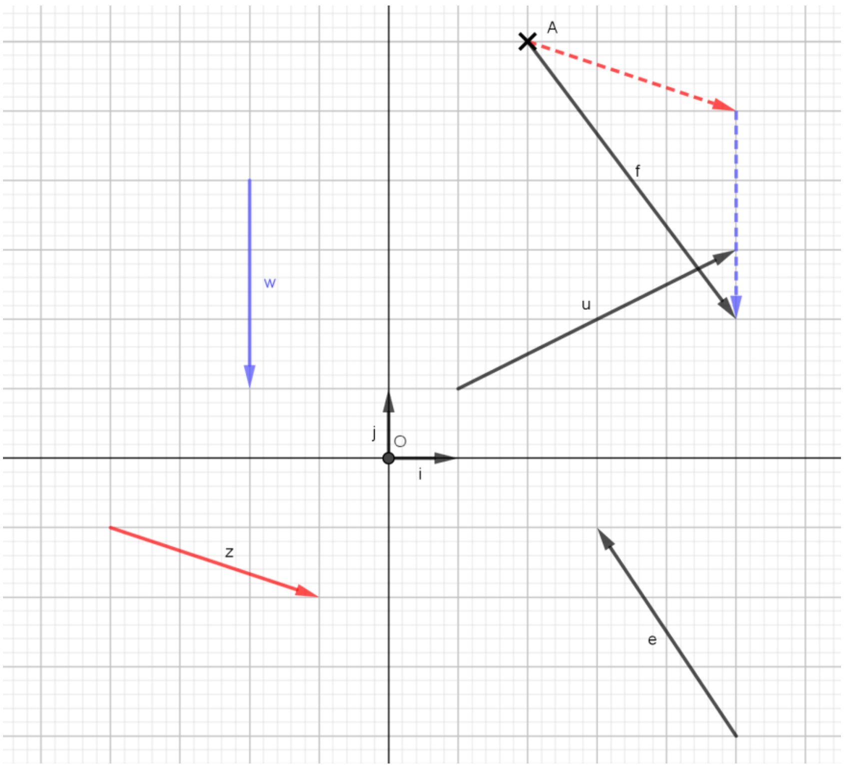
Remarque : On pouvait aussi montrer que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$ en utilisant les coordonnées.

5. $AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
$CB = \sqrt{(6-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$
Supposons que ACBD soit un losange, on aurait AC = CB.
Cela n'est pas vrai donc ACBD n'est pas un losange.

Exercice 2 :

1. $\vec{u}\binom{4}{2}$ $\quad \vec{w}\binom{0}{-4}$ $\quad \vec{z}\binom{3}{-1}$

2. et 3.



4. $\vec{e}\binom{-2}{3}$ $\quad 2\vec{e}\binom{-4}{6}$ $\quad u\binom{4}{2}$ $\quad 3\vec{u}\binom{12}{6}$ $\quad$ finalement $\vec{g}\binom{-4-12}{6-6}$ $\quad \vec{g}\binom{-16}{0}$

Exercice 3 :

1. $6\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=6\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=6\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}$

$6\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=5\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AF}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=5\overrightarrow{AF}-5\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=5\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}\right)=5\overrightarrow{FE}$

2. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FE}$ sont colinéaires donc les droites (AB) et (FE) sont parallèles.

ÉQUATIONS DE DROITES

Exercice 1 :

$(d_1)\colon\ x=5$ $\qquad (d_2)\colon\ y=\frac{1}{2}x+3$ $\qquad (d_3)\colon\ y=-\frac{2}{3}x+5$ $\qquad (d_4)\colon\ y=-x$ $\qquad (d_5)\colon\ y=-1$

Exercice 2 :

1. La droite passant par A et B a pour équation réduite : $y=mx+p$

$$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-(-2)}{6-3}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{2}{3}x+p$$

A appartient à (AB) donc :

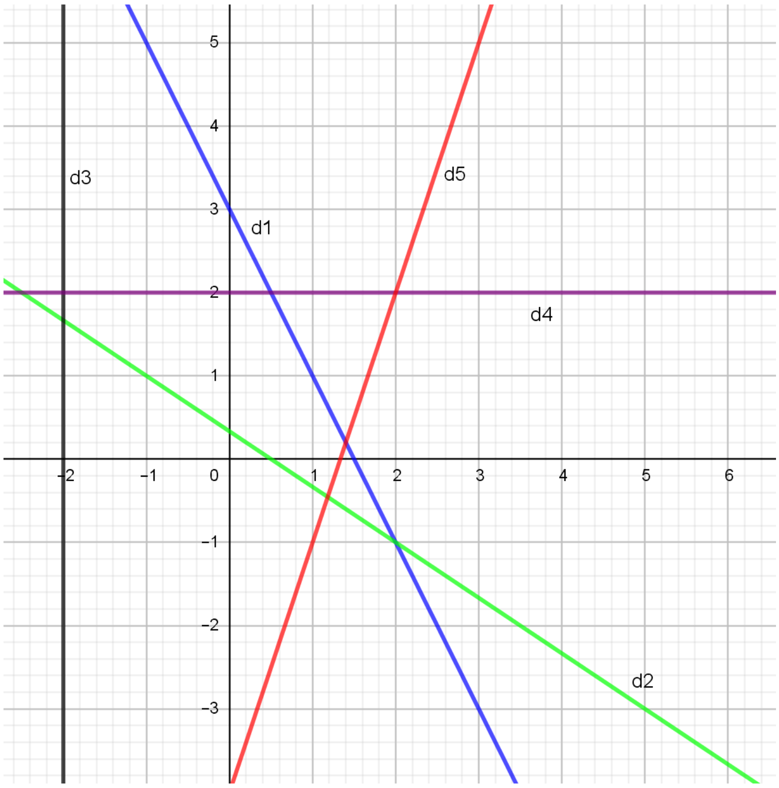
$$y_A=\frac{2}{3}x_A+p\Leftrightarrow -2=\frac{2}{3}\times 3+p\Leftrightarrow -2=2+p\Leftrightarrow p=-4$$

$$\text{(AB) a donc pour équation }\ y=\frac{2}{3}x-4$$

2. $$M(x;y)\in(AB)\cap(d)\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ y=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ \frac{2}{3}x-4=2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ \frac{2}{3}x-2x=1+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ -\frac{4}{3}x=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ x=5:(-\frac{4}{3})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}x-4\\ x=-\frac{15}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{15}{4}\right)-4\\ x=-\frac{15}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\frac{13}{2}\\ x=-\frac{15}{4}\end{cases}$$

Exercice 3 :



PROBABILITÉS – STATISTIQUES

Exercice 1 :

Effectif total = 40

Etendue = 101 – 99 =2
Q1 est la $10^{ème}$ valeur de la série ordonnée soit 99,5
Q3 est la $30^{ème}$ valeur de la série ordonnée soit 100,3
Ecart interquartile = 100,3 – 99,5 = 0,8. $3 \times 0,8 = 2,4$
Le premier critère est vérifié.

Médiane = 100,05
Moyenne = 99,935
Le deuxième critère est vérifié.

Ecart type $\sigma \approx 0,5$
$[100-2\sigma ; 100+2\sigma]$=[99 ;101]. Toutes les valeurs sont dans l'intervalle.
Le troisième critère est vérifié.

La balance contrôlée est fiable.

Exercice 2 :

1. $\overline{\mathrm{V} \cup \mathrm{T}}$ = « le produit est un mug »
2.

	Défaut	Sans défaut	Total
Tasses	0,0275	0,5225	0,55
Verres	0,004	0,096	0,1
Mugs	0,0245	0,3255	0,35
Total	0,056	0,944	1

7% des mugs ont un défaut donc 7% de 35% des produits ont un défaut. $0{,}07 \times 0{,}35 = 0{,}0245$

Exercice 3 :

1. Une baisse de 10 % peut être associée à une multiplication par 0,90.

$$P \xrightarrow{\times 0{,}90} 112{,}5$$

Prix initial (€) Prix final (€)

$P = 112{,}5 : 0{,}90 = 125.$ Le prix initial de l'objet était de 125 €.

2. Une hausse de 20 % peut être associée à une multiplication par 1,20.
   Une baisse de 20 % peut être associée à une multiplication par 0,80.
   $1{,}20 \times 0{,}80 = 0{,}96.$
   La variation est pourcentage cherchée est une baisse de 4 %.

3. A et B sont incompatibles signifie que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$

ÉQUATIONS/INÉQUATIONS

Equations :

$3x + 4 = 2(x - 5)$
$\Leftrightarrow 3x + 4 = 2x - 10$
$\Leftrightarrow 3x - 2x = -10 - 4$
$\Leftrightarrow x = -14$
$S = \{-14\}$

$2(7 - 3x) - 3 = -6x + 11$
$\Leftrightarrow 14 - 6x - 3 = -6x + 11$
$\Leftrightarrow 0x = 0$
$S = \mathbb{R}$

$$\frac{3x-2}{5} - \frac{2x-1}{3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(3x-2)}{15} - \frac{5(2x-1)}{15} = \frac{30}{15}$$

$\Leftrightarrow 3(3x - 2) - 5(2x - 1) = 30$
$\Leftrightarrow 9x - 6 - 10x + 5 = 30$
$\Leftrightarrow -x - 1 = 30$
$\Leftrightarrow x = -31$
$S = \{-31\}$

$$\frac{7x-3}{2x-1}=5$$

Notons tout d'abord que cette équation a un sens sur l'ensemble $]-\infty;\mathbf{0,5}[\cup]\mathbf{0,5};+\infty[$

$\Leftrightarrow 7x-3=5(2x-1)$
$\Leftrightarrow 7x-3=10x-5$
$\Leftrightarrow 7x-10x=-5+3$
$\Leftrightarrow -3x=-2$
$\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$
$S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$(x-7)^2=16$
$\Leftrightarrow (x-7)^2-16=0$
$\Leftrightarrow (x-7)^2-4^2=0$
$\Leftrightarrow (x-7+4)(x-7-4)=0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x-11)=0$
$S=\{3;11\}$

$3(x+1)^2+75=0$
$3(x+1)^2\geq 0$ donc $3(x+1)^2+75\geq 75$
$S=\emptyset$

$(2-5x)^2=(1+8x)^2$
$\Leftrightarrow (2-5x)^2-(1+8x)^2=0$
$\Leftrightarrow [(2-5x)+(1+8x)][(2-5x)-(1+8x)]=0$
$\Leftrightarrow [3+3x][1-13x]=0$
$S=\left\{-1;\frac{1}{13}\right\}$

Systèmes.

$\begin{cases}3x+y=9\\2x-5y=-11\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=9-3x\\2x-5y=-11\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=9-3x\\2x-5(9-3x)=-11\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=9-3x\\2x-45+15x=-11\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=9-3x\\17x=34\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=9-3x\\x=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=3\\x=2\end{cases}$

$\boldsymbol{S=\{(2;3)\}}$

$\begin{cases}4x+7y=-1\\2x-3y=19\quad(\times 2)\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+7y=-1\\4x-6y=38\end{cases}\quad(-)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+7y=-1\\13y=-39\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+7y=-1\\y=-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x+7\times(-3)=-1\\y=-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4x=20\\y=-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=-3\end{cases}$

$\boldsymbol{S=\{(5;-3)\}}$

$\begin{cases}\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=1\quad(\times 6)\\4x+3y=84\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=6\\4x+3y=84\end{cases}\quad(+)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=6\\6x=90\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x-3y=6\\x=15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2\times 15-3y=6\\x=15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3y=-24\\x=15\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}y=8\\x=15\end{cases}$

$\boldsymbol{S=\{(15;8)\}}$

Inéquations :

$2x - 1 > 3(x - 4)$
$\Leftrightarrow 2x - 1 > 3x - 12$
$\Leftrightarrow -x > -11$
$\Leftrightarrow x < 11$
$S =]-\infty; 11[$

$(5 - 2x)(x + 7) \leq 0$

$5 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

$x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = -7$

x	$-\infty$		-7		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$5 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x + 7$		$-$	0	$+$		$+$	
$(5 - 2x)(x + 7)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -7] \cup [\frac{5}{2}; +\infty[$

$-3(2 + 7x)(x - 5)^2 > 0$

$2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2}{7}$

$(x - 5)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $-3(x + 5)^2 \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$\frac{-2}{7}$		$+\infty$
$-3(x + 5)^2$		$-$		$-$	
$2 + 7x$		$-$	0	$+$	
$-3(2 + 7x)(x - 5)^2$		$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -\frac{2}{7}[$

$(5 - 2x)^2 \geq 36 \Leftrightarrow (5 - 2x)^2 - 36 \geq 0 \Leftrightarrow (5 - 2x)^2 - 6^2 \geq 0 \Leftrightarrow (5 - 2x + 6)(5 - 2x - 6) \geq 0$
$\Leftrightarrow (11 - 2x)(-1 - 2x) \geq 0$

$11 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{2}$

$-1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{11}{2}$		$+\infty$
$11 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$-1 - 2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(11 - 2x)(-1 - 2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [\frac{11}{2}; +\infty[$

$$\frac{(x-2)(3-x)}{3x-4} \leq 0$$

Notons tout d'abord que cette inéquation n'est définie que pour $x \neq \frac{4}{3}$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
$3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3$
$3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ $(valeur\ interdite)$

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$x-2$		$-$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$3x-4$		$-$	‖	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x-2)(3-x)}{3x-4}$		$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]\frac{4}{3}; 2] \cup [3; +\infty]$

$$\frac{2}{x} > \frac{3}{x+2}$$

Notons tout d'abord que cette inéquation n'est définie que pour $x \in]-\infty\,; -2[\cup]-2\,; 0[\cup]0\,; +\infty[$

$$\frac{2}{x} > \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+2)-3x}{x(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+4-3x}{x(x+2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x(x+2)} > 0$$

$-x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$
$x = 0$ $(valeur\ interdite)$
$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ $(valeur\ interdite)$

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$-x+4$		$+$	‖	$+$	‖	$+$	0	$-$	
x		$-$	‖	$-$	‖	$+$		$+$	
$x+2$		$-$	‖	$+$	‖	$+$		$+$	
$\frac{-x+4}{x(x+2)}$		$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty; -2[\cup]0; 4[$